Épreuve de Mathématiques A

Durée 4 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de centre, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage des calculatrices est interdit.

Une feuille de papier millimétré fournie est à rendre avec la copie.

Avertissement

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, la **clarté** et la **précision des raisonnements** entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Consignes

— Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée bleue ou noire.
— L'usage de stylo à friction, stylo plume, stylo feutre, liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est interdit.
— Remplir sur chaque copie en MAJUSCULES toutes vos informations d'identification : *[au concours, il s'agira de]* nom, prénom, numéro d'inscription, date de naissance, le libellé du concours, le libellé de l'épreuve et la session *[mais aujourd'hui on suivra les consignes données dans les cadres ci-dessous]*.
— Une feuille dont l'entête n'a pas été intégralement renseigné ne sera pas prise en compte.
— Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Le sujet est composé de trois parties indépendantes entre elles.

Pour cette épreuve de concours blanc, chaque candidat rédigera trois copies indépendantes qu'il intitulera respectivement :
- **MATHÉMATIQUES A-I**
- **MATHÉMATIQUES A-II**
- **MATHÉMATIQUES A-III**

en indiquant très clairement sur chacune d'elles son numéro d'anonymat comme seule information d'identification. Il rendra obligatoirement trois copies, même si certaines devaient être blanches. A la copie MATHÉMATIQUES A-III sera jointe la feuille de papier millimétré fournie avec le sujet.

Cette partie est à rédiger impérativement sur une première copie portant votre numéro d'anonymat et intitulée :

MATHÉMATIQUES A-I

Si vous n'abordez pas cette partie, il vous est demandé de rendre une copie blanche.

Partie I

1) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ est convergente. On notera I sa valeur dans la suite. La détermination de cette valeur constitue l'objectif de cette partie.

2) a) Montrer que pour tout réel $x \geqslant 0$ l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente. Il est donc légitime pour de tels x de définir :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

b) Quelle est la valeur de $f(0)$?

c) Justifier que pour tout $x \geqslant 0$ on a l'encadrement :

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{\pi}{2}$$

d) Montrer que sur l'intervalle $[0, +\infty[$ cette fonction f est continue.

3) a) Soit un réel $a > 0$ fixé. Montrer que f est de classe C^1 sur l'intervalle $[a, +\infty[$ et donner une expression de $f'(x)$ sous forme d'une intégrale.

b) Sur quel intervalle le plus grand possible peut-on affirmer que f est de classe C^1 compte tenu de ce qui précède ?

c) Montrer que pour tout $x > 0$ on a :

$$f'(x) - f(x) = -\frac{I}{\sqrt{x}}$$

4) On considère l'équation différentielle :

$$y'(x) - y(x) = -\frac{I}{\sqrt{x}} \qquad (\mathscr{E})$$

a) Donner la solution générale définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle homogène associée à $(\mathscr{E})$.

b) Soit un réel $x_0 > 0$ fixé. Comment écrire la primitive de $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}$ s'annulant en x_0 à l'aide d'une intégrale ?

c) Montrer qu'il existe une constante réelle k telle que sur $]0, +\infty[$ on ait :

$$f(x) = \left(k - I\int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{e}^x$$

d) Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{x_0} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$ converge.

e) En déduire qu'il existe une constante réelle ℓ telle que sur $]0, +\infty[$ on ait :

$$f(x) = \left(\ell - I\int_0^{x} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{e}^x$$

puis montrer que ceci peut s'écrire :

$$f(x) = \left(\ell - 2I\int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{-v^2}\mathrm{d}v\right)\mathrm{e}^x$$

5) Justifier que sur $]0,+\infty[$ on a :

$$0 \leqslant \ell - 2I \int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{-v^2} \mathrm{d}v \leqslant \frac{\pi}{2}\,\mathrm{e}^{-x}$$

et en déduire en fonction de I la valeur de la constante ℓ définie ci-dessus.

6) En utilisant avec précision les résultats précédents, déterminer la valeur de I connue sous le nom d'*intégrale de Gauss.*

Cette partie est à rédiger impérativement sur une deuxième copie portant votre numéro d'anonymat et intitulée :

MATHÉMATIQUES A-II

Si vous n'abordez pas cette partie, il vous est demandé de rendre une copie blanche.

Partie II

1) a) Déterminer la solution générale sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle :

$$(\mathscr{E}_0) \qquad \big(1-x^2\big)y'(x) - xy(x) = 0$$

b) A l'aide de la méthode de variation de la constante, donner la solution générale sur le même intervalle de l'équation différentielle :

$$(\mathscr{E}) \qquad \big(1-x^2\big)y'(x) - xy(x) = 1$$

2) On recherche les solutions de l'équation différentielle $(\mathscr{E})$ développables en série entière sur un domaine $]-R,R[\, \subset \mathbb{R}$ avec R strictement positif. Soit donc $f :]-R,R[\, \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in\,]-R,R[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels. On suppose cette fonction f solution de $(\mathscr{E})$ sur $]-R,R[$ et on pose $a_0 = \alpha$.

a) Que vaut le coefficient a_1 ?

b) Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+1} = \frac{n}{n+1}\,a_{n-1}$$

c) Exprimer alors les coefficients a_{2p} et a_{2p+1} en fonction de p et α pour tout p entier naturel.

3) On suppose que $\alpha = 0$ dans cette question et seulement dans cette question.

a) Énoncer le critère de d'Alembert pour les séries numériques.

b) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ dans ce cas.

c) Déterminer, à l'aide de la question 1)b), le développement en série entière de $x \mapsto (\arcsin x)^2$ en précisant le domaine de validité de l'égalité obtenue et le théorème utilisé.

4) On suppose que $\alpha = \frac{\pi}{2}$ dans cette question et seulement dans cette question. Pour tout n entier naturel, on pose :

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x$$

a) Démontrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la même relation de récurrence que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la question 2)b).

b) Que valent W_0 et W_1 ? Que peut-on en déduire à propos des suites $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

c) Justifier que $W_n > 0$ pour tout n entier naturel. Déterminer le sens de variation de $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire l'ordre des trois termes W_{2p-1}, W_{2p} et W_{2p+1} de cette suite.

d) Démontrer que :

$$\lim_{p\to+\infty}\left(\frac{a_{2p}}{a_{2p+1}}\right) = 1$$

et déterminer de même la valeur de :

$$\lim_{p\to+\infty}\left(\frac{a_{2p-1}}{a_{2p}}\right)$$

e) Montrer que la suite de terme général $(n+1)a_n a_{n+1}$ est constante et préciser la valeur de cette constante.

f) Justifier avec précision que :

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

g) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ dans ce cas.

5) Déterminer, l'aide des question 3) et 4), le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ dans le cas général où α est quelconque.

Cette partie est à rédiger impérativement sur une troisième copie portant votre numéro d'anonymat et intitulée :

MATHÉMATIQUES A-III

Si vous n'abordez pas cette partie, il vous est demandé de rendre une copie blanche. La feuille de papier millimétré fournie, même non utilisée, sera jointe à cette copie et portera elle aussi votre numéro d'anonymat.

Partie III

Le plan $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et de $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ un repère orthonormé direct. On considère alors la courbe Γ de représentation paramétrique :

$$t \in [0, 2\pi] \mapsto M(t) \in \mathbb{R}^2 \text{ point de coordonnées } \begin{cases} x(t) = t\cos t \\ y(t) = t\sin t \end{cases}$$

1) Pour tout $t \in [0, 2\pi]$ on appelle $\overrightarrow{u}(t)$ le vecteur :

$$\overrightarrow{u}(t) = \cos t\,\overrightarrow{i} + \sin t\,\overrightarrow{j}$$

a) Comment s'écrit le vecteur $\overrightarrow{OM}(t)$ à l'aide de ce vecteur $\overrightarrow{u}(t)$? En déduire une construction géométrique simple du point $M(t)$ faisant intervenir la longueur $\left\|\overrightarrow{OM}(t)\right\|$ et un angle orienté que l'on précisera.

b) Calculer la dérivée de $t \mapsto \overrightarrow{u}(t)$ sur $[0, 2\pi]$ et en notant :

$$\overrightarrow{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u}}{\mathrm{d}t}(t)$$

justifier que $\left(\overrightarrow{u}(t), \overrightarrow{v}(t)\right)$ est une base orthonormée directe du plan.

c) En déduire la valeur de $\left\|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t)\right\|$ et préciser quels sont les points de Γ qui sont réguliers.

2) Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{D}_t$ la tangente à la courbe Γ au point $M(t)$.

3) a) Pour $t \in [0, 2\pi]$ justifier que l'angle orienté $\left(\overrightarrow{u}(t), \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t)\right)$ admet une mesure dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et déterminer en fonction de t la valeur de cette mesure.

b) En déduire une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{i}, \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t)\right)$.

4) On considère la fonction f définie sur $[0, 2\pi]$ par :

$$\forall t \in [0, 2\pi], \ f(t) = t + \arctan t$$

a) Établir le tableau de variation de cette fonction.

b) En déduire qu'il existe exactement cinq valeurs de $t \in [0, 2\pi]$ notées $t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ en lesquelles la tangente $\mathscr{D}_t$ est « horizontale » ou « verticale » (c'est-à-dire parallèle à l'un des axes du repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ fixé depuis le début).

5) On donne les valeurs approchées au centième près suivantes :

$$t_1 \approx 0{,}86 \ \text{ et } \ \cos t_1 \approx 0{,}65 \qquad t_2 \approx 2{,}03 \ \text{ et } \ \cos t_2 \approx -0{,}44$$
$$t_3 \approx 3{,}43 \ \text{ et } \ \cos t_3 \approx -0{,}96 \qquad t_4 \approx 4{,}91 \ \text{ et } \ \cos t_4 \approx 0{,}20$$

a) Proposer, en utilisant les données précédentes, une construction du point $M(t_4)$ à l'aide uniquement d'une règle graduée et d'un compas.

b) Sur la feuille de papier millimétrée fournie avec le sujet, et en prenant une unité de deux centimètres, placer avec précision les points $M(t)$ avec leurs tangentes à Γ pour :

$$t \in \left\{t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}$$

et achever le tracé du support de la courbe Γ appelée *spirale d'Archimède*.

6) Soit Γ' la courbe du plan paramétrée par :

$$t \in [-2\pi, 0] \mapsto N(t) \in \mathbb{R}^2 \text{ point de coordonnées } \begin{cases} x(t) = t\cos t \\ y(t) = t\sin t \end{cases}$$

Justifier que le support de Γ' se déduit de celui de Γ par une transformation géométrique simple que l'on décrira précisément.

7) On désigne par Δ la partie du plan délimitée par la courbe Γ et le segment $[M(0), M(2\pi)]$ ou, si l'on préfère, la réunion des segments $[O, M(t)]$ lorsque t décrit $[0, 2\pi]$ et on appelle $\mathscr{A}$ l'aire de cette partie du plan.

On note $D(r)$ le disque de centre O et de rayon r réel positif.

Soit n un entier naturel non nul. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ on note $t_k = k\frac{2\pi}{n}$.

a) Que est la valeur de l'aire $\mathscr{A}_k(r)$ de la partie $D_k(r)$ de $D(r)$ comprise entre les deux demi-droites d'origine O et dirigées par les vecteurs $\overrightarrow{u}(t_k)$ et $\overrightarrow{u}(t_{k+1})$?

b) En déduire que l'aire $\mathscr{A}_k$ de la partie Δ_k de Δ comprise entre les deux demi-droites de la question précédente vérifie :

$$\frac{4\pi^3}{n^3}k^2 \leqslant \mathscr{A}_k \leqslant \frac{4\pi^3}{n^3}(k+1)^2$$

c) Démontrer que pour tout N entier naturel on a :

$$\sum_{p=0}^{N} p^2 = \frac{1}{6}N(N+1)(2N+1)$$

d) Comment obtenir Δ à l'aide des parties Δ_k du plan ? En déduire la valeur de $\mathscr{A}$ en commençant par établir un encadrement de cette aire.

Fin de l'épreuve